
Contrôle continu 1

Exercice 1. Considérons les deux sous-ensembles de \mathbb{R}^4 suivants:

$$E = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y = w = 0, x - z = 0\}$$

et

$$F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + 2z = 0, y - w = 0\}.$$

1. Montrer que E et F sont des sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 .
2. Trouver une base de E et calculer sa dimension.
3. Trouver une base de F et calculer sa dimension.
4. Montrer que E et F sont en somme directe.
5. Donner un espace supplémentaire de $E \oplus F$ dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x, y, z, w) = (x + y + 2z, y - w, x - z).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Sans calculer $\text{Ker } f$ ou $\text{Im } f$, répondre à la question suivante, est-ce que f est injective?
3. Calculer la matrice de f dans les bases canoniques de \mathbb{R}^4 et de \mathbb{R}^3 .
4. Trouver une base de $\text{Ker } f$.
5. Quelle est la dimension de $\text{Im } f$?

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel de polynômes d'ordre ≤ 2 et considérons l'application

$$\Psi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]; \quad \Psi(P)(X) = P''(2) \cdot (X^2 - 1) + P'(1) \cdot (X - 1) + P(0) \cdot (X^2 + X).$$

1. Montrer que Ψ est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice de Ψ dans la base canonique $\{1, X, X^2\}$.
3. L'application linéaire Ψ est-elle un isomorphisme?